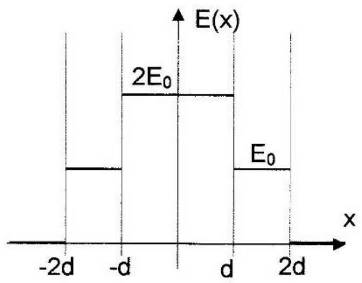
Esercizio n.1 [10 punti]

In una regione di spazio compresa fra i piani ***x=-2d*** e ***x=2d*** è presente un campo elettrico costante $\bar{E}_0$ diretto in direzione perpendicolare ai piani, il cui modulo varia come mostrato in figura. Si determini la distribuzione di carica che genera tale campo. Si calcoli e si faccia la rappresentazione grafica del potenziale e.s. in funzione delle x assumendo ***V(0)=0***. Si calcoli la velocità con cui un elettrone posto in x=0 con v=0, arriva in x=2d.

Dati: $E_0 = 3\ V/m$; $d = 1\ cm$.



Soluzione

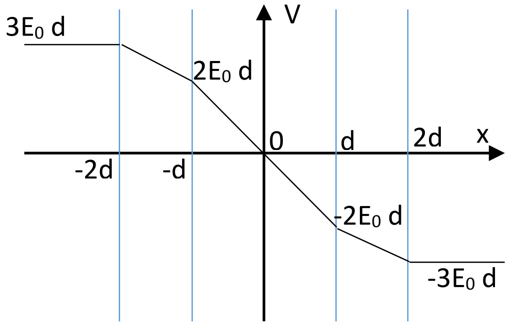
L'unica distribuzione di cariche che fornisce i campi indicati è una distribuzione con $+\sigma$ in -2d e –d, e $-\sigma$ in d e 2d, con $\sigma = E_0\,\varepsilon_0$.

$$-d < x < d:\quad V_1(x) = -\int_{C1}^{x} E(x)\,dx = -2E_0 x + C \quad ; \quad V_1(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0 \quad ; \quad V_1(x) = -2E_0 x$$

$$-2d < x < -d:\ V_2(x) = -\int_{C2}^{x} E(x)\,dx = -E_0 x + C2 \ ; \ V_1(-d) = V_2(-d) \rightarrow \ C2 = E_0 d \ ; \ V_2(x) = -E_0(x-d)$$

$$-\infty < x < -2d: \qquad V_3(-2d) = C3 = V_2(-2d) = 3E_0 d \quad V_3(x) = 3E_0 d$$

Il grafico del potenziale è:



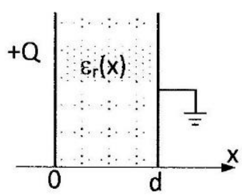
La velocità si può calcolare utilizzando la conservazione dell'energia:

$$\Delta E_c = L_{Fe} \qquad \frac{1}{2}mv_f^2 = q\,\Delta V_{f,i} = q[V(2d) - V(0)] = 3E_0 qd \quad \text{quindi} \quad v_f = \sqrt{\frac{6E_0 qd}{m}} = 1{,}8\ \cdot 10^5\ m/s$$

Esercizio n.2 [10 punti]

Un condensatore piano ideale con le armature di superficie ***S*** e distanza relativa ***d***, è interamente riempito con un materiale dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa varia come: $\boldsymbol{\varepsilon_r(x) = ax + b}$; $\boldsymbol{0 \le x \le d}$

L'armatura in x=0 possiede la carica ***Q***, mentre la seconda è collegata a terra. Calcolare la d.d.p fra le armature, il valore della capacità del condensatore, le espressioni delle densità di superficie e di volume della cariche di polarizzaione, ed i relativi valori nei casi in cui si può fare il calcolo.



Dati: $S = 30\ cm^2$; $d = 1\ cm$; $Q = 15\ nC$; $b = 1$; $a = 100\ m^{-1}$.

Soluzione

$$\overline{D}(x) = \sigma\,\hat{x} = \frac{Q}{S}\,\hat{x} = 0{,}5\cdot 10^{-5}\hat{x}\ \ C/m^2 \quad ; \ \bar{E}(x) = \frac{\overline{D}(x)}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\sigma\,\hat{x}}{\varepsilon_0\,(ax+b)}$$

$$\Delta V = -\int_d^0 E(x)dx = -\int_d^0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0\,(ax+b)}dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 a}\ln\frac{b}{ad+b} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 a}\ln\left(1+\frac{ad}{b}\right) = 3{,}92\ kV$$

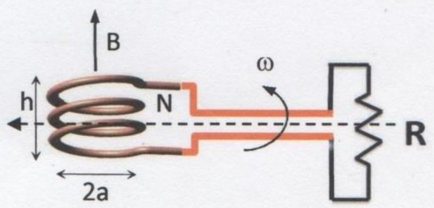
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 3{,}8\ pF$$

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\overline{D} = \frac{ax+b-1}{ax+b}\,\sigma\,\hat{x} \quad ; \quad \sigma_p = \overline{P}\cdot\hat{n} = -\frac{ax}{ax+1}\sigma = \begin{array}{ll} x=0 \rightarrow\ \ 0 & C/m^2 \\ x=d\ \rightarrow -\,\sigma/2 = \ -0{,}25\ 10^{-5} & C/m^2 \end{array}$$

$$\rho_P = -div\,\overline{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -\frac{a}{(ax+b)^2}\sigma$$

Esercizio n.3 [10 punti]

In un picolo generatore idroelettrico un flusso di acqua continuo mantiene in rotazione un solenoide all'interno di un campo ***B*** costante ed uniforme. Il solenoide è lungo ***h***, è composto da ***N*** spire circolari di raggio ***a*** e alimenta un carico pari a ***R***. Supponendo che la potenza media fornita dal flusso d'acqua per mantenere la bobina in rotazione uniforme sia ***P***, si calcoli la velocità angolare di rotazione ***ω*** e il relativo periodo di rotazione ***T***.



Si valuti inoltre dopo quanto tempo (approssimativamente) il sistema, se all'istante zero viene posto in rotazione, raggiunge la situazione stazionaria.

Nota: 1) Si trascurino gli attriti meccanici. 2) Si consideri il solenoide come se fosse un solenoide infinito, anche se h non è molto maggiore di a.

Dati: B = 10 mT ; N = 10⁴ ; h = 20 cm ; a = 10 cm ; R = 2 Ω ; P = 4 kW

Soluzione

$$\emptyset(B) = N\pi a^2 B\ \cos\omega t \ ; \quad V(t) = -\frac{d\emptyset}{dt} = N\pi a^2 B\omega\ \sin\omega t \ \ ; \quad i = V/R \quad ; \quad P_{el} = V^2/R$$

$$< P > = \ P_{el}(\max)/2 = P_m = \frac{\left[N\pi a^2 B\omega\right]^2}{2R} \quad da\ cui: \quad \omega = \frac{\sqrt{2P_m R}}{N\pi a^2 B} = 40{,}3\ \ rad/s \qquad \text{e:} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}\ \cong 0{,}16\ s$$

$L = \mu_0\frac{N^2\pi a^2}{l} = 19{,}7\ H$; $\tau = \frac{L}{R} \cong 10$ s >> T, quindi t(∞) ~ 3τ= 30 s.